ЗАДАЧИ ОД ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ НА НИЗА (1)

1. а) $\lim_{n\to\infty} \frac{6n}{2n-1} = \left(\begin{array}{l}\text{бројителот и именителот}\\ \text{ги делиме со } n\end{array}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{6n \;/:n}{2n-1 \;/:n} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{6n}{n}}{\frac{2n}{n} - \frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{6}{2 - \frac{1}{n}} = \left(\begin{array}{l}\text{кога } n\to\infty \text{ билo } \frac{c}{n} \text{ ќе}\\ \text{кое 0 за било која вредност}\\ \text{на константата } c\end{array}\right)$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{6}{2 - \left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{6}{2-0} = 3$ ●

б) $\lim_{n\to\infty} \frac{2-3n}{7n-1} = \left(\begin{array}{l}\text{бројителот и именителот}\\ \text{ги делиме со } n\end{array}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2-3n \;/:n}{7n-1 \;/:n} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n} - \frac{3n}{n}}{\frac{7n}{n} - \frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n} - 3}{7 - \frac{1}{n}} = \left(\begin{array}{l}\text{кога } n\to\infty \text{ билo } \frac{c}{n} \text{ ќе}\\ \text{кое 0 за било која вредност}\\ \text{на константата } c\end{array}\right)$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{2}{n}\right) - 3}{7 - \left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{0-3}{7-0} = -\frac{3}{7}$ ●

в) $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+3n-4}{2n^2-1} = \left(\begin{array}{l}\text{бројителот и именителот ги делиме со } n^2\\ \text{ќе скратиме со највисоката степен на } n \text{ и}\\ \text{скратиме бројителот и именителот со иста}\\ \text{вредност}\end{array}\right)$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+3n-4 \;/:n^2}{2n^2-1 \;/:n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n^2}{n^2} + \frac{3n}{n^2} - \frac{4}{n^2}}{\frac{2n^2}{n^2} - \frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 + \frac{3}{n} - \frac{4}{n^2}}{2 - \frac{1}{n^2}} =$

(кога $n\to\infty$ и $n^2\to\infty$, па затоа $\frac{c}{n^2}\to 0$ за било која вредност на константата c)

$= \lim_{n\to\infty} \frac{3 + \left(\frac{3}{n}\right) - \left(\frac{4}{n^2}\right)}{2 - \left(\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{3}{2}$ ●

1) $\lim_{n\to\infty}\left(4+\frac{3}{n}\right)\left(\frac{4n-3}{6n+5}\right)=$ (според правилото за лимес од производ две функции, кое претставува производ од лимес со два броја множители) те

$=\lim_{n\to\infty}\left(4+\frac{3}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n-3}{6n+5}\right)=$ (според објаснувањата дадени во претходните задачи имаме:

$=\lim_{n\to\infty}\left(4+\frac{3}{n}\right)\lim_{n\to\infty}\frac{4n-3\ /:n}{6n+5\ /:n}=\lim_{n\to\infty}\left(4+\frac{3}{n}\right)\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{3}{n}}{6+\frac{5}{n}}=$

$=(4+0)\cdot\frac{4-0}{6+0}=4\cdot\frac{4}{6}=\frac{16}{6}=\frac{8}{3}$

2. а) $\lim_{n\to\infty}\frac{7n-4}{4n^2+5n-1}=$ (бројителот и именителот ги делиме со n^2 бидејќи со највисоката степен на n и секоја дропка и именителот со која вредност)

$=\lim_{n\to\infty}\frac{7n-4\ \ /:n^2}{4n^2+5n-1\ /:n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{7n}{n^2}-\frac{4}{n^2}}{\frac{4n^2}{n^2}+\frac{5n}{n^2}-\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{7}{n}-\frac{4}{n^2}}{4+\frac{5}{n}-\frac{1}{n^2}}=$

$=\frac{0}{4}=0$

б) $\lim_{n\to\infty}\frac{8n^3}{4n^2+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{8n^3\ \ /:n^3}{4n^2+5\ \ /:n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{8n^3}{n^3}}{\frac{4n^2}{n^3}+\frac{5}{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{8}{\frac{4}{n}+\frac{5}{n^3}}=\infty$

(именителот тежи кон 0, и целиот именителот е строго позитивен бидејќи $\mathbb{N}$ како збир од позитивни вредности. Значи вредноста на лимесот е $+\infty$)

3 а) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{n^3}-3\right)\left(2+\frac{1}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{n^3}-3\right)\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{2^n}\right)=(0-3)\lim_{n\to\infty}\left(2+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)=$

($\left(\frac{1}{2}\right)^n\to 0$ кога $n\to\infty$, бидејќи тоа е низата q^n за $-1<q<1$)

$=-3\lim_{n\to\infty}\left(2+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)=-3\cdot 2=-6$

б) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3}{n^2+4}-\frac{2n^2}{4n+1}\right)=$

(Ако limесой го разделиме на двата собироци одделно, бидејќи степенот на n во двете дропки се поголеми кај дропчелой, ќе се добие $\infty-\infty$ што е неопределен израз. Затоа, прво ќе ги извршиме назначените операции)

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3(4n+1)-2n^2(n^2+4)}{(n^2+4)(4n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^4+n^3-2n^4-8n^2}{4n^3+16n+n^2+4}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^4+n^3-8n^2\ /:n^4}{4n^3+n^2+16n+4\ /:n^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}-\frac{8}{n^2}}{\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{16}{n^3}+\frac{4}{n^4}}=\infty$$

(Во именителот сите собироци се позитивни, па значи именителот е позитивен, а дропчелот е исто позитивен, па значи вредноста на limесой е $+\infty$)

в) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^2}{2n+3}-5n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2-5n(2n+3)}{2n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2-10n^2-15n}{2n+3}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-5n^2-15n\ /:n^2}{2n+3\ /:n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{-5-\frac{15}{n}}{\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}=-\infty$$

(Во именителот сите собироци се позитивни, па значи именителот е позитивен, а дропчелот е негативен, па значи вредноста на limесой е $-\infty$)

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7^n+4^n}{7^n-4^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7^n+4^n\ |:7^n}{7^n-4^n\ |:7^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{7^n}{7^n}+\frac{4^n}{7^n}}{\frac{7^n}{7^n}-\frac{4^n}{7^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\left(\frac{4}{7}\right)^n}{1-\left(\frac{4}{7}\right)^n}=1$

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7^{n+1}+4^n}{7^n-4^{n+2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7^n\cdot 7+4^n\ |:7^n}{7^n-4^n\cdot 4^2\ |:7^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7+\left(\frac{4}{7}\right)^n}{1-\left(\frac{4}{7}\right)^n\cdot 16}=7$

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3\cdot 5^{n+1}+2^{n+2}}{5^{n-1}-3\cdot 2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3\cdot 5^n\cdot 5+2^n\cdot 2^2}{\frac{5^n}{5}-3\cdot 2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{15\cdot 5^n+4\cdot 2^n\ |:5^n}{\frac{5^n}{5}-3\cdot 2^n\ |:5^n}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{15+4\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^n}{\frac{1}{5}-3\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^n}=\frac{15}{\frac{1}{5}}=75$

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4^n+2}{1-4^{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4^n+2\ |:4^n}{1-\frac{4^n}{4}\ |:4^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{4^n}}{\frac{1}{4^n}-\frac{1}{4}}=\frac{1}{-\frac{1}{4}}=-4$

(когда $n\to\infty$ и $4^n\to\infty$, тогда дроби $\frac{1}{4^n}\to 0$ и $\frac{2}{4^n}\to 0$)

5 а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2+\sqrt{n}}{10n^2-1} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2+\sqrt{n}\ /:n^2}{10n^2-1\ /:n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{5n^2}{n^2}+\frac{\sqrt{n}}{n^2}}{\frac{10n^2}{n^2}-\frac{1}{n^2}} =$

(n^2 во израза $\frac{\sqrt{n}}{n^2}$, то внесување во коренот и степенува n^4)

$= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5+\sqrt{\frac{n}{n^4}}}{10-\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5+\sqrt{\frac{1}{n^3}}}{10} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+2}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\ /:n}{\sqrt{n^2+2}\ /:n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\frac{\sqrt{n^2+2}}{n}} =$ (n го внесуваме во коренот и степенува n^2)

$= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{\frac{n^2}{n^2}+\frac{2}{n^2}}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1}} = 1$

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+2n-2}}{2n+3} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+2n-2}\ /:n}{2n+3\ /:n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{\frac{n^2}{n^2}+\frac{2n}{n^2}-\frac{2}{n^2}}}{\frac{2n}{n}+\frac{3}{n}} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}}}{2+\frac{3}{n}} = \dfrac{\sqrt{1}}{2} = \dfrac{1}{2}$