ЗАДАЧИ ОД ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ НА Ф-ЈА- 1

1 а) $\lim_{x\to 3}(2x-1) = 2\cdot 3 - 1 = 5$

б) $\lim_{x\to -2}(x^3-5x+4) = (-2)^3 - 5(-2) + 4 = -8 + 10 + 4 = 6$

в) $\lim_{x\to 1}\frac{5x^2+3}{x+2} = \frac{5\cdot 1^2+3}{1+2} = \frac{8}{3}$

г) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x-1} = \frac{2^2-2\cdot 2}{2-1} = \frac{4-4}{1} = \frac{0}{1} = 0$

2. а) $\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+3x}{x^2+x} =$

Ако заменime за $x=0$ во изразот $\frac{2x^2+3x}{x^2+x}$ се добива $\frac{0}{0}$ што е неопределен израз. За да ја „изгубиме" неопределеноста, бројителот и именителот ги разложуваме на множители:

$\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+3x}{x^2+x} = \lim_{x\to 0}\frac{x(2x+3)}{x(x+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{2x+3}{x+1} = \frac{2\cdot 0+3}{0+1} = 3$

б) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+5x}{3x} = \lim_{x\to 0}\frac{x(x+5)}{3x} = \lim_{x\to 0}\frac{x+5}{3} = \frac{0+5}{3} = \frac{5}{3}$

в) $\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x^2+2x} = \lim_{x\to -2}\frac{(x-2)(x+2)}{x(x+2)} = \frac{-2-2}{-2} = 2$

г) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x}{x^3-x^2} = \lim_{x\to 1}\frac{x(x^2-1)}{x^2(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)} = \frac{2}{1} = 2$

ѓ) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{3x-9} = ?$

Броителот е квадратен тричлен кој се разложува на линеарни множители по формулата: $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$ каде x_1 и x_2 се решенија на кв. р-ка $ax^2+bx+c=0$

Значи прво ќе ја решиме квадратната р-ка

$x^2-5x+6=0$

$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2}$

$x_1 = 3 \quad x_2 = 2$

Според горната фла имаме: $x^2-5x+6 = (x-3)(x-2)$

$\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{3x-9} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{(x-3)(x-2)}{3(x-3)} = \frac{3-2}{3} = \frac{1}{3}$

е) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^4+3x^2-4}{7x^4-7x} = ?$

За броителот да го разложиме на множители воведуваме смена

$x^2 = t$

$x^4+3x^2-4 = t^2+3t-4$

Според горната фла имаме:

$t^2+3t-4=0$

$t_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2}$

$t_1 = -4 \quad t_2 = 1$ Значи имаме:

$x^4+3x^2-4 = t^2+3t-4 = (t+4)(t-1) \overset{t=x^2}{=} (x^2+4)(x^2-1) =$

$= (x^2+4)(x-1)(x+1)$

За интегралот ќе ја применеме ф-лата

$$A^3 - B^3 = (A-B)(A^2+AB+B^2)$$

т.е. во конкретниот случај имаме:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4+3x^2-4}{7x^4-7x} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^2+4)(x-1)(x+1)}{7x(x^3-1^3)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^2+4)(x-1)(x+1)}{7x(x-1)(x^2+x+1)} =$$

$$= \frac{(1^2+4)(1+1)}{7\cdot 1(1^2+1+1)} = \frac{10}{21}$$

е) $$\lim_{x\to 2} \frac{x^5-16x}{2x^2+4x-16} = ?$$

$$2x^2+4x-16=0$$

$$x_{1,2} = \frac{-4\pm\sqrt{16+128}}{4}$$

$$x_1=2 \quad x_2=-4$$

$$2x^2+4x-16 = 2(x-2)(x+4)$$

За вторите два интеграли ќе ја применеме ф-лата

$$A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^5-16x}{2x^2+4x-16} = \lim_{x\to 2} \frac{x(x^4-16)}{2(x-2)(x+4)} = \lim_{x\to 2} \frac{x(x^2-4)(x^2+4)}{2(x-2)(x+4)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x(x-2)(x+2)(x^2+4)}{2(x-2)(x+4)} = \frac{2\cdot(2+2)(2^2+4)}{2\cdot(2+4)} = \frac{64}{12} = \frac{16}{3}$$

Пример (само за IV^{в}) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x-4}{5x-10}$

Бидејќи кога се заменти $x=2$ во изразот $\dfrac{x^3-2x-4}{5x-10}$ се добива $\dfrac{0}{0}$, што значи дека $x=2$ е корен на броителот x^3-2x-4. Ќе го разложиме овој полином делејќи го со $x-2$ ге:

$$(x^3-2x-4):(x-2)=x^2+2x+2$$

$$\begin{array}{r} x^3-2x^2 \\ \hline 2x^2-2x-4 \\ 2x^2-4x \\ \hline 2x-4 \\ 2x-4 \\ \hline 0 \end{array}$$

Значи $(x^3-2x-4)=(x^2+2x+2)(x-2)$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x-4}{5x-10}=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2+2x+2)(x-2)}{5(x-2)}=\frac{2^2+2\cdot 2+2}{5}=\frac{10}{5}=2$$

3.) (Само за IV^g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-2x^3+3x^2-4x+2}{x^3-3x+2}$

Ако се замени $x=1$ во изразот $\dfrac{x^4-2x^3+3x^2-4x+2}{x^3-3x+2}$ се добива $\dfrac{0}{0}$, па значи $x=1$ е корен и на бројителот и на именителот. Исто како во зад. 1) ќе делиме со $x-1$ за да ги разложиме бројителот и именителот на множители.

$(x^4-2x^3+3x^2-4x+2):(x-1)=x^3-x^2+2x-2$

x^4-x^3

$-x^3+3x^2-4x+2$

$-x^3+x^2$

$2x^2-4x+2$

$2x^2-2x$

$-2x+2$

$-2x+2$

$0=0$

Значи $x^4-2x^3+3x^2-4x+2=(x-1)(x^3-x^2+2x-2)$

Сега за именителот:

$(x^3-3x+2):(x-1)=x^2+x-2$

x^3-x^2

x^2-3x+2

x^2-x

$-2x+2$

$-2x+2$

$0=0$

$(x^3-3x+2)=(x^2+x-2)(x-1)$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4-2x^3+3x^2-4x+2}{x^3-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^3-x^2+2x-2)}{(x^2+x-2)(x-1)}$$

Сега повторно само за x за замена 1 се добива $\frac{0}{0}$, та можеме да ја повторение истата постапка за бројнителот те да го делиме со $x-1$, или може и со групирање на членови:

$$x^3-x^2+2x-2=(x^3-x^2)+(2x-2)=x^2(x-1)+2(x-1)=$$
$$=(x-1)(x^2+2)$$

За именителот имаме:

$$x^2+x-2=0$$
$$x_{1/2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}$$
$$x_1=-2 \quad x_2=1$$
$$x^2+x-2=(x+2)(x-1)$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2+2x-2}{x^2+x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+2)}{(x+2)(x-1)}=\frac{3}{3}=1$$

3. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3}{x+2} = 0 \quad \left(\frac{c}{\infty} \to 0\right)$

б) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^2-3x+1}{x^2-2x+3} \Big| :x^2 = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}} = 4$

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3+2x^2-1}{x^2+2x+3} \Big| :x^3 = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}} = \infty$

г) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2-1}{x^3+5x^2+3x} \Big| :x^3 = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x}-\frac{1}{x^3}}{1+\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}} = 0$

