ЗАДАЧИ ОД ГЕОМЕТРИСКА ПРОГРЕСИЈА

1. Во една ГП $S_6 = -364$ и $q = -3$. Најди го a_1

реш. $S_6 = -364$

$q = -3$

$a_1 = ?$

За S_6 ја применуваме ф-лата $S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$ т.е:

$$S_6 = a_1 \frac{q^6 - 1}{q - 1}$$

$$-364 = a_1 \frac{(-3)^6 - 1}{-3 - 1}$$

$$-364 = a_1 \frac{729 - 1}{-4}$$

$$-364 = a_1 \frac{728}{-4}$$

$$-364 = a_1 \cdot (-182)$$

$$a_1 = 2$$

2. Пресметај ги Sn и n во ГП, ако $a1=6$, $q=2$ и $an=192$

реш. $a_1=6$

$q=2$

$a_n=192$

$S_n=?$

$n=?$

$a_n=a_1\cdot q^{n-1}$

$192=6\cdot 2^{n-1}$

$\frac{192}{6}=2^{n-1}$

$32=2^{n-1}$

$2^5=2^{n-1}$

$n-1=5$

$n=6$

$S_n=a_1\frac{q^n-1}{q-1}$

$S_6=6\frac{2^6-1}{2-1}$

$S_6=6\frac{64-1}{1}$

$S_6=6\cdot 63$

$S_6=378$

3. Најди ја ГП ако $a_6 - a_4 = 72$ и $a_3 - a_1 = 9$.

реш. $a_6 - a_4 = 72$ Во двата услови, за a_6, a_4 и a_3
и $a_3 - a_1 = 9$ ја применуваме формулата
$a_n = a \cdot q^{n-1}$ и добиваме:

$$a_1 \cdot q^5 - a_1 q^3 = 72 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 q^3 (q^2 - 1) = 72$$
$$a_1 q^2 - a_1 = 9 \qquad\qquad a_1 (q^2 - 1) = 9$$

Двете р-ки ги делиме (лева со лева, десна со десна страна) па

$$\frac{a_1 q^3 (q^2 - 1)}{a_1 (q^2 - 1)} = \frac{72}{9}$$

$$q^3 = 8$$
$$q = \sqrt[3]{8}$$
$$q = 2$$

Сега q го замнуваме во една од равенките па во $a_1 \cdot (q^2 - 1) = 9$
$a_1 \cdot (4 - 1) = 9$
$a_1 = 3$

ГП гласи: 3, 6, 12, 24, ...

4. Збирот на првите два члена на една ГП е 15, а збирот на следните два е е 60. Најди ја прогресијата!

решение: $a_1 + a_2 = 15$

$a_3 + a_4 = 60$

$a_n = ?\quad q = ?$

Во условот на задачата за a_2, a_3 и a_4 ја применуваме формулата $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ и добиваме:

$a_1 + a_1 q = 15$

$a_1 q^2 + a_1 q^3 = 60$

Добиваме две равенки со две непознати, па го решаваме системот од овие две равенки.

$$\begin{cases} a_1 + a_1 q = 15 \\ a_1 q^2 + a_1 q^3 = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1(1+q) = 15 \\ a_1 q^2 (1+q) = 60 \end{cases}$$

Двете равенки ги делиме (лева со лева, десна со десна страна) и добиваме:

$$\frac{a_1(1+q)}{a_1 q^2 (1+q)} = \frac{15}{60_4}$$

I сл. $q = 2$

$a_1(1+2) = 15$

$a_1 = 5$

ГП: 5, 10, 20, 40, ...

те $\frac{1}{q^2} = \frac{1}{4}$

$q^2 = 4$

$q = \pm 2$

II сл. $q = -2$

$a_1(1-2) = 15$

$a_1 = -15$

ГП: $-15, 30, -60, 120, \ldots$

5. Најди ја ГП ако $a_5 - a_1 = 624$ и $a_3 - a_1 = 24$.

реш: Исто како во зад 1 за a_5 и a_3 да примену-
ваме ф-лата $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ и добиваме:

$$\begin{cases} a_5 - a_1 = 624 \\ a_3 - a_1 = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 q^4 - a_1 = 624 \\ a_1 q^2 - a_1 = 24 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1(q^4 - 1) = 624 \\ a_1(q^2 - 1) = 24 \end{cases} \quad | :$$

$$\text{те} \quad \frac{a_1(q^4-1)}{a_1(q^2-1)} = \frac{624}{24}$$

$q^4 - 1 = (q^2)^2 - 1^2$ ја според ф-лата

$A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$ може да се

разложи те $q^4 - 1 = (q^2)^2 - 1^2 = (q^2+1)(q^2-1)$

$A \quad B \quad (A+B)(A-B)$

Забава имаме:

$$\frac{(q^2+1)(q^2-1)}{q^2-1} = 26$$

$$q^2 + 1 = 26$$

$$q^2 = 25$$

$$q = \pm 5$$

I сл. $q = 5$. Заменуваме во една од равенките на системот:

$a_1(q^2 - 1) = 24$

$a_1(25 - 1) = 24$

$a_1 = 1$

Г.П. гласи:

$1, 5, 25, 125, \ldots$

II сл. $q = -5$. Заменуваме во една од р-киите на системот:

$a_1(q^2 - 1) = 24$

$a_1(25 - 1) = 24$

$a_1 = 1$

ГП гласи:

$1, -5, 25, -125, \ldots$

6. Најди ја ГП ако $a1+a2+a3=39$ и $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 729$.

решение: Во двата услови на задачата ќе во
$a_1 + a_2 + a_3 = 39$
и $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 729$ за a_2 и a_3 ја примену-
ваме ф-лата $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, па добиваме:

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = 39$$
$$a_1 \cdot a_1 q \cdot a_1 q^2 = 729$$

Добивме две р-ки со две непознати a_1 и q,
па ќе решаваме систем од овие две р-ки:

$$\begin{cases} a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = 39 \\ a_1 \cdot a_1 q \cdot a_1 q^2 = 729 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1(1+q+q^2) = 39 \\ a_1^3 q^3 = 729 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1(1+q+q^2) = 39 \\ a_1 q = \sqrt[3]{729} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1(1+q+q^2) = 39 \\ a_1 q = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1(1+q+q^2) = 39 \\ a_1 = \frac{9}{q} \end{cases}$$

Заменуваме $a_1 = \frac{9}{q}$ во првата р-ка и добиваме:

$$\frac{9}{q}(1+q+q^2) = 39$$

$$\frac{9}{q} + 9 + 9q = 39 \quad | \cdot q$$

$$9 + 9q + 9q^2 = 39q$$

$$9q^2 - 30q + 9 = 0 \quad | :3$$

$$3q^2 - 10q + 3 = 0$$

$$q_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100-36}}{6}$$

$$q_1 = \frac{10+8}{6} = 3 \qquad q_2 = \frac{10-8}{6} = \frac{1}{3}$$

Ако $q_1 = 3$
$a_{11} = \frac{9}{q} = \frac{9}{3} = 3$

$\Gamma\Pi_1$: 3, 9, 27, 81, ...

Ако $q_2 = \frac{1}{3}$

$a_{12} = \frac{9}{q} = \frac{9}{\frac{1}{3}} = 27$

$\Gamma\Pi_2$: 27, 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, ...

Title: сеп 13-12:10 (6 of 11)

7. Во една ГП $a_n = 972$, $a_{n-1} = 324$ и $S_n = 1456$. Најди ги q, n, a_1 !

реш. $a_n = 972$
$a_{n-1} = 324$
$S_n = 1456$
$a_1 = ?$
$q = ?$

По дефиниција q е количник на било кој член и неговиот претходник т.е.

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

$$q = \frac{972}{324}$$

$$q = 3$$

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$1456 = a_1 \frac{3^n - 1}{3 - 1}$$

$$1456 = a_1 \frac{3^n - 1}{2}$$

$$2912 = a_1 (3^n - 1)$$

Бука имаме две непознати a_1 и n

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$972 = a_1 \cdot 3^{n-1}$$

и пак ги имаме двете непознати a_1 и n

Добивме две р-ки со две непознати, a_1 и n па го решаваме системот од овие равенки:

$$\begin{cases} 2912 = a_1 (3^n - 1) \\ 972 = a_1 \cdot 3^{n-1} \quad | \cdot 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2912 = a_1 (3^n - 1) \\ 2916 = a_1 \cdot 3^n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2912 = a_1 \left(\frac{2916}{a_1} - 1 \right) \\ 3^n = \frac{2916}{a_1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2912 = 2916 - a_1 \\ 3^n = \frac{2916}{a_1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 4 \\ 3^n = \frac{2916}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 4 \\ 3^n = 729 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 4 \\ 3^n = 3^6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 4 \\ n = 6 \end{cases}$$

Title: сеп 13-12:10 (7 of 11)

8. Најди ја ГП ако $a5-a2=78$ и $a3+a2+a1=13$.

решение: Во условот на задачата за a_2, a_3 и a_5 ја применуваме ф-лата $a_n = a q^{n-1}$ и добиваме:

$$a_1 q^4 - a_1 q = 78$$
$$a_1 q^2 + a_1 q + a_1 = 13$$

Добиваме две р-ки со две непознати те

$$\begin{cases} a_1 q (q^3 - 1) = 78 \\ a_1 (q^2 + q + 1) = 13 \end{cases} /:$$

$$\frac{a_1 q (q^3-1)}{a_1 (q^2+q+1)} = \frac{78}{13}$$

За $q^3 - 1 = q^3 - 1^3$ ја применуваме ф-лата

$$A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)$$

$$\frac{q(q-1)(q^2+q+1)}{q^2+q+1} = 6$$

$$q^2 - q = 6$$
$$q^2 - q - 6 = 0$$
$$q_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2}$$
$$q_1 = 3 \qquad q_2 = -2$$

I сл. $q = 3$

$$a_1 (q^2 + q + 1) = 13$$
$$a_1 (9 + 3 + 1) = 13$$
$$a_1 = 1$$

ГП: $1, 3, 9, 27, \ldots$

II сл. $q = -2$

$$a_1 (q^2 + q + 1) = 13$$
$$a_1 (4 - 2 + 1) = 13$$
$$a_1 = \frac{13}{3}$$

ГП: $\frac{13}{3}, \frac{-26}{3}, \frac{52}{3}, \frac{-104}{3}, \ldots$

9. Во една геометриска прогресија збирот на првиот и последниот член е 85, а нивниот производ е 400. Која е прогресијата, ако збирот на членовите е 55?

решение: $a_1 + a_n = 85$

$a_1 \cdot a_n = 400$

$S_n = 55$

Ги применуваме формулите $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ и $S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$

и добиваме:

$a_1 + a_1 q^{n-1} = 85$

$a_1 \cdot a_1 q^{n-1} = 400$

$a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = 55$

Добивме три р-ки со три непознати a_1, q и n.

$$\begin{cases} a_1(1 + q^{n-1}) = 85 \\ a_1^2 q^{n-1} = 400 \\ a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = 55 \end{cases}$$

Од втората р-ка $q^{n-1} = \frac{400}{a_1^2}$ го заменуваме во првата р-ка и добиваме:

$a_1\left(1 + \frac{400}{a_1^2}\right) = 85$

$a_1 + \frac{400}{a_1} = 85 \quad / \cdot a_1$

$a_1^2 + 400 = 85a_1$

$a_1^2 - 85a_1 + 400 = 0$

$a_{1,1,2} = \frac{85 \pm \sqrt{7225 - 1600}}{2}$

$a_{1_1} = \frac{85 + 75}{2} = 80$

$a_{1_2} = \frac{85 - 75}{2} = 5$

I сл. $a_2 = 80$. Заменување во

$$q^{n-1} = \frac{400}{a_1^2}$$

$$q^{n-1} = \frac{400}{6400}$$

$$q^{n-1} = \frac{1}{16}$$

За да го добиеме q^n последната р-ка ја множиме со q и потоа заменуваме во третата р-ка од системот те:

$$q^{n-1} = \frac{1}{16} \quad | \cdot q$$

$$q^n = \frac{q}{16}$$

$$a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = 55$$

$$80 \frac{\frac{q}{16} - 1}{q - 1} = 55$$

$$80 \frac{\frac{q - 16}{16}}{\frac{q - 1}{1}} = 55$$

$$\cancel{80}^{5} \frac{q - 16}{\cancel{16}(q - 1)} = 55 \quad | : 5$$

$$\frac{q - 16}{q - 1} = 11$$

$$q - 16 = 11q - 11$$

$$10q = -5$$

$$q = -\frac{1}{2}$$

ГП: $80, -40, 20, -10, \ldots$

II сл. $a_1 = 5$

За повторување истата постапка и за $a_1 = 5$

$$q^{n-1} = \frac{400}{a_1^2}$$

$$q^{n-1} = \frac{400}{25}$$

$$q^{n-1} = 16 \quad | q$$

$$q^n = 16q$$

$$a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = 55$$

$$5 \frac{16q - 1}{q - 1} = 55 \quad | : 5$$

$$\frac{16q - 1}{q - 1} = 11$$

$$16q - 1 = 11q - 11$$

$$5q = -10$$

$$q = -2$$

ГП: $5, -10, 20, -40, \ldots$

10. Збирот на првите 5 члена на една ГП е 93, а збирот на следните пат е 2976. Најди ја прогресијата!

решение: $S_5 = 93$

$S_5 + 2976 = S_{10}$

$a_1 = ?\quad q = ?$

Во двете р-ки за S_5 и S_{10} ја примениуваме ф-лата $S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1}$ и добиваме:

$$a_1 \frac{q^5 - 1}{q-1} = 93$$

$$a_1 \frac{q^5 - 1}{q-1} + 2976 = a_1 \frac{q^{10} - 1}{q-1}$$

Добивме две р-ки со две непознати a_1 и q ја ја решаваме системот од двете р-ки:

$$\begin{cases} a_1 \frac{q^5 - 1}{q-1} = 93 \\ a_1 \frac{q^{10} - 1}{q-1} - a_1 \frac{q^5 - 1}{q-1} = 2976 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \frac{q^5 - 1}{q-1} = 93 \\ a_1 \frac{q^{10} - 1 - (q^5 - 1)}{q-1} = 2976 \end{cases}$$

Левите р-ки ги делиме т.е.

$$\frac{a_1 \frac{q^5 - 1}{q-1}}{a_1 \frac{q^{10} - 1 - q^5 + 1}{q-1}} = \frac{93}{2976} \quad 32$$

Земаме за $q = 2$ во една од р-ките на системот:

$$a_1 \frac{q^5 - 1}{q-1} = 93$$

$$a_1 \frac{32 - 1}{2 - 1} = 93$$

$$a_1 = \frac{93}{31}$$

$$a_1 = 3$$

$$\frac{q^5 - 1}{q^{10} - q^5} = \frac{1}{32}$$

$$\frac{q^5 - 1}{q^5(q^5 - 1)} = \frac{1}{32}$$

$$q^5 = 32$$

$$q = \sqrt[5]{32}$$

$$q = 2$$

ГП: $3, 6, 12, 24, \ldots$

Title: сеп 17-11:45 (11 of 11)