ЗАДАЧИ ОД ДЕФИНИЦИОНА ОБЛАСТ И НУЛИ НА НА Ф-ЦИЈА

1. Одреди ја дефиниционата област на следните ф-ции:

а) $f(x)= x^2-5x+2$

реш: Нема никакво ограничување во однос на операциите па затоа $D_f = \mathbb{R}$

б) $f(x)= \dfrac{x^2+9}{x^3+5x^2-6x}$

реш: Со нула не се дели, па затоа именителот не смее да биде нула те

$x^3+5x^2-6x \neq 0$

За решавање добиената неравенка те

$x(x^2+5x-6)\neq 0$

$\boxed{x\neq 0}$ и $x^2+5x-6\neq 0$

$x_{1,2}\neq \dfrac{-5\pm\sqrt{25+24}}{2}$

$x_1\neq \dfrac{-5+7}{2}$ $\quad$ $x_2\neq \dfrac{-5-7}{2}$

$\boxed{x_1\neq 1}$ $\quad$ $\boxed{x_2\neq -6}$

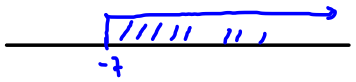
Значи $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0,1,-6\}$

в) $f(x)=\sqrt{x+7}$

реш. Изразот под коренот треба да биде позитивен или еднаков на 0 те

$x+7\geq 0$

$x\geq -7$



$D_f=[-7,\infty)$

г) $f(x)=\sqrt{x^2+x-2}$

реш: Исто како под б) за подкореновиот израз треба

$$x^2+x-2\geq 0$$

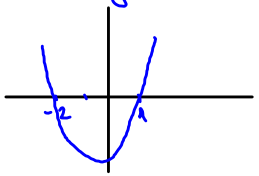
За да се реши квадратна неравенка треба прво да се реши квадратната р-ка

$$x^2+x-2=0$$

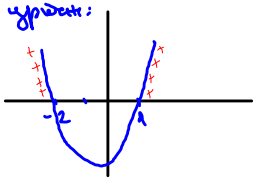
$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}$$

$$x_1=1 \quad x_2=-2$$

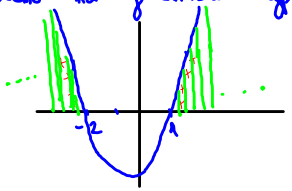
Потоа се скицира графикот на квадратната фја (тоа парабола со пресек во 1 и 2 со x-оската) бидејќи $a=1$ во квадратната фја $f(x)=x^2+x-2$, значи параболата е завртена со отворот нагоре т.е изгледа вака:



Ние ја решаваме неравенката $x^2+x-2\geq 0$ што значи нè интересира каде парабола е позитивна. Тоа е означено со црвени плусеви на овој цртеж:



Овие означени делови на параболата се дадени за $x\in(-\infty,-2]\cup[1,\infty)$ што е исто од означената со зелено на долниот цртеж.



Значи $D_f=(-\infty,2]\cup[1,\infty)$

ђ) $f(x)=\sqrt{x^2-9}$

реш: Треба $x^2-9\geq 0$

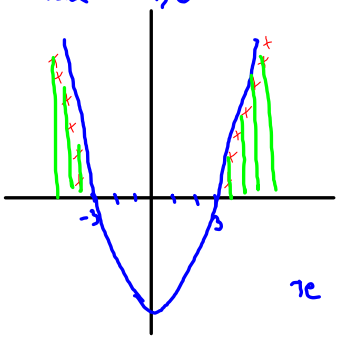
Исто како во зад i) прво се решава р-нката

$x^2-9=0$

$x^2=9$

$x=\pm 3$

Потоа се скицира параболата и се одредува каде е таа ≥ 0



$x\in(-\infty,-3]\cup[3,\infty)$

те $D_f=(-\infty,-3]\cup[3,\infty)$

i) $f(x)=\lg(x^2-7x+10)$

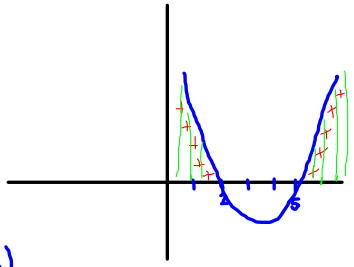
реш: Логаритамската фја е дефинирана само за позитивните вредности на аргументот те

$x^2-7x+10>0$

$x^2-7x+10=0$

$x_{1/2}=\frac{7\pm\sqrt{49-40}}{2}$

$x_1=5 \quad x_2=2$



$x\in(-\infty,2)\cup(5,\infty)$

те $D_f=(-\infty,2)\cup(5,\infty)$

в) $f(x) = \lg(2x-3) + \lg(2x+3)$

реш. Трябва $2x-3>0$ и $2x+3>0$

$2x>3$ и $2x>-3$

$x>\frac{3}{2}$ и $x>-\frac{3}{2}$



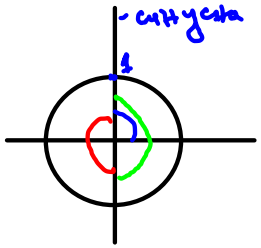
Трябва да бъдат изпълнени и двете условия, за да вземем пресек на интервалите.

Знам $D_f = \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$

н. $f(x) = \frac{1+\sin x}{1-\sin x}$

реш Трябва $1-\sin x \neq 0$

т.е $\sin x \neq 1$



Знам $x \neq \frac{\pi}{2}$ $(x \neq 90°)$ и всеки нареден обол зъбелнем за π $(за\ 180°)$

т $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

3) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

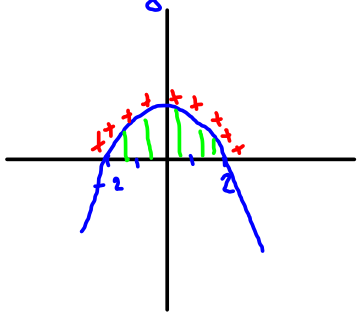
реш. Трева $4 - x^2 \geq 0$

$4 - x^2 = 0$

$x^2 = 4$

$x = \pm 2$

За скицирање параболата. Виреjки $a = -1 < 0$ шта изгледа така.



$x \in [-2, 2]$ те

$D_f = [-2, 2]$

2. . Пресметај ги нулите на ф-јата:

а) $f(x) = -x^3 + 4x$

$-x^3 + 4x = 0$

$x(-x^2 + 4) = 0$

$x = 0$ и $-x^2 + 4 = 0 \quad /\cdot(-1)$

$x^2 - 4 = 0$

$x^2 = 4$

$x = \pm 2$

Значи ф-јатта има три нули.

$x = 0$	$x = 2$ и $x = -2$

б) $f(x)=\frac{x^2-4}{x}$

$f(x)=0$

$\frac{x^2-4}{x}=0 \quad / \cdot x$

$x^2-4=0$

$x^2=4$

$x=\pm 2$

функцията има две нули:

$\boxed{x=-2 \quad \text{и} \quad x=2}$

в) $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$

$f(x)=0$

$\frac{x^2+1}{x^2-1}=0 \quad / \cdot (x^2-1)$

$x^2+1=0$

$x^2=-1$

Общо р-ка няма решение во м-во на реалните броеви, па значи функцията нема нули

г) $f(x)=\sqrt{x^2+x-2}$

$f(x)=0$

$\sqrt{x^2+x-2}=0 \quad / ()^2$

$x^2+x-2=0$

$x_{1/2}=\frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$

$\boxed{x_1=1 \quad x_2=-2}$

g) $f(x) = 3^{x^2-3} - 3$

$f(x) = 0$

$3^{x^2-3} - 3 = 0$

$3^{x^2-3} = 3^1$

$x^2 - 3 = 1$

$x^2 = 4$

$x = \pm 2$

Имаме сега $\boxed{x = -2 \text{ и } x = 2}$

h) $f(x) = \log(x+3)$

$f(x) = 0$

$\log(x+3) = 0$

$10^0 = x+3$

$1 = x+3$

$\boxed{x = -2}$

e) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$f(x) = 0$

$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = 0 \quad / \cdot 2$

$e^x - e^{-x} = 0$

$e^x - \frac{1}{e^x} = 0 \quad / \cdot e^x$

$(e^x)^2 - 1 = 0$

$e^{2x} - 1 = 0$

$e^{2x} = 1$

$e^{2x} = e^0 \quad (e^0 = 1)$

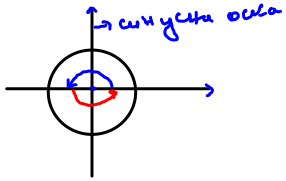
$2x = 0$

$\boxed{x = 0}$

i) $f(x) = \sin\frac{2x}{x-1}$

$f(x) = 0$

$\sin\frac{2x}{x-1} = 0$



Синусой има стойност 0 за $0, \pi, 2\pi, \ldots$ π

за $k\pi$

Значи търсим

$\frac{2x}{x-1} = k\pi \quad / \cdot (x-1)$

$2x = k\pi x - k\pi$

$2x - k\pi x = -k\pi$

$x(2 - k\pi) = -k\pi$

$x = \frac{-k\pi}{2 - k\pi}$

т.е. $\boxed{x = \frac{k\pi}{k\pi - 2}, \text{ където } k \in \mathbb{Z}}$